

郑晓娜<sup>①</sup> 孙曙光<sup>②</sup> 武学奇<sup>③</sup>

**摘要** 本文研究了在供应商既通过零售商，也通过直销渠道销售产品的双渠道供应链中的价格和广告策略。在一个无限期连续动态博弈模型中，每一期，供应商先制定自己的批发价格、直销价格和广告投入的决策；零售商随后选择零售价格和零售渠道的广告投入。通过模型求解，我们发现，（1）价格对广告的依赖关系取决于二者的广告是竞争性的还是互补性的。（2）当供应商的广告对零售商的需求是起补充作用时，零售商可能有搭顺风车的行为。（3）由于供应商有两个销售渠道，即便零售商的广告对直销渠道的需求是竞争性的，在一定情况下，零售商增加广告投入仍然可能使得供应商受益。

**关键词** 双渠道供应链，广告，声誉，动态微分博弈

## 双渠道结构下价格与广告的动态关系<sup>④</sup>

### 0 引言

在全球范围内，制造商直销渠道的出现（特别是通过网络直销的形式）给传统的分销模式带来了重大的影响。以往离终端市场“较远”的上游厂商，如通用电气、惠普、联想、海尔等，可以借助于互联网平台开拓新的销售产品的机会。同时消费者对多渠道分销也越来越习惯。这种现象近年在供应链管理和营销科学领域引起了学者的广泛兴趣。很多文献研究了多渠道（multiple distribution channels）的价格/服务竞争、渠道冲突和渠道合作等问题（参见Cattani, Gilland和Swaminathan, 2004以及Tsay和Agrawal, 2004 对此的综述）。

在服务竞争中，广告（advertising）被认为是影响需求和渠道竞争的重要因素（Dhar和Hoch, 1997; Ailawadi, 2001; Ailawadi和Keller, 2004）。根据营销学的基本原理，在企业销售产品的过程中，产品的价格和促销活动是厂商影响市场需求的两个重要工具。在产品同质化趋势加剧和市场竞争日趋激烈的情况下，商家也愈来愈依赖于营销努力（而不是简单地降低成本）来创造需求。在营销领域，很早就有研究关注到一些非价格因素，如广告、人员促销、货架空间、服务承诺等，对消费者购买选择的影响作用（例如Chu和Desai, 1995; Iyer, 1998; Tsay和Agrawal, 2000; Wang和Gerchak, 2001等设定的需求模型）。因此，供应链和营销科学的学者在研究分销渠道时经常会关注价格和促销努力这样的变量。但是这些研究大多只关注广告和价格对需求的短期影响。现实中，很多研究表明过去的广告活动会影响消费者现阶段的购买行为。而广告的这种累积效果（商家的声誉）对需求竞争，以及广告和价格的交互关系都会产生影响。文献中对于广告和价格的关系有着不同的研究结论。一些研究认

---

<sup>①</sup>郑晓娜，北京大学光华管理学院，讲师，Email: [xzheng@gsm.pku.edu.cn](mailto:xzheng@gsm.pku.edu.cn)

<sup>②</sup>孙曙光，北京大学光华管理学院，博士生，Email: [sunshuguang@gsm.pku.edu.cn](mailto:sunshuguang@gsm.pku.edu.cn)

<sup>③</sup>武学奇，北京大学光华管理学院，硕士生，Email: [wuxueqi@gsm.pku.edu.cn](mailto:wuxueqi@gsm.pku.edu.cn)

<sup>④</sup>感谢《营销科学学报》的编委及匿名评审专家对本文完善所提供的建设性意见。本文受国家自然科学基金项目（70902015）资助。特此致谢！

为更高的广告花费会导致更高的产品价格 (Nelson, 1974; Bagwell和Ramey, 1994)。也有研究认为有时广告提供的信息会降低产品之间的差异程度, 从而导致价格的下降 (Gossman和Shapiro, 1984; Robert和Stahl, 1993)。这种价格与广告的交互作用在多渠道中将更加复杂。多渠道中制造商与零售商的广告一方面导致二者在需求上产生竞争。但是另一方面二者的广告投入也可能会提高消费者对产品的质量、属性的认可 (即制造商和零售商的广告投入对于增强品牌知名度都有正面的影响), 这时消费者对投入广告的渠道和竞争渠道的产品都更感兴趣, 从而更倾向于购买 (该品牌的) 产品。此时广告在两个渠道之间产生互补的作用。这种互补作用也被称为制作商和零售商的广告行为有“正向外部性”。例如文献Tsay和Agrawal (2004) 中就使用了这种观点。此外, 广告的互补作用也存在实证证据。Dubé和Manchanda (2005) 的实证研究发现: 对于需求的影响, 广告的作用 (在他们的数据中) 似乎更加增强同类产品的整体吸引力, 即产生互补性。他们将其称为构建产品类型 (category-building) 或互补性 (complementary)。Dubé和Manchanda (2005) 还发现, 当市场较大时, 这样互补作用更加显著。

与本文相关的文献有两类: 一类是关于多渠道, 特别是双渠道结构的研究; 另一类是关于供应链中广告的研究。在营销领域, 有关渠道的研究由来已久。例如, McGuire和Staelin (1983) 分析了在由两个制造商和其排他性零售商构成的双寡头分销渠道中Nash均衡时产品的替代效应。Choi (1996) 研究了在两个制造商与两个零售商构成的双寡头共同分销的渠道下产品和商店存在差异时厂商的价格竞争行为。Lee和Staelin (1997) 考虑了两个制造商和两个零售商之间交互影响的价格竞争行为, 同时还讨论了几种需求函数形式 (线性、幂、指数形式及其组合形式) 的差异。Corbett和Karmarkar (2001) 考察了两级供应链中上下游厂商的进入决策对供应链结构的影响, 并指出一个  $(n_1, n_2)$  的供应链 (即上游有  $n_1$ , 下游有  $n_2$  个进入者) 与一个  $(n_2, n_1)$  的两级供应链导致的最终市场价格和提供的数量是相同的。这些关于渠道的研究多数关注价格或数量竞争, 且研究的渠道类型是单一种类的渠道, 而不是多渠道<sup>⑤</sup>。

在电子商务环境下, 许多营销及供应链管理领域的学者开始关注包含新型网络渠道的多渠道供应链中的价格冲突、渠道协调以及渠道选择等问题 (参加Tsay和Agrawal, 2004; Cattani, Gilland和Swaminathan, 2004的综述)。Swaminathan和Tayur (2003) 总结了与电子商务环境相关的供应链分析性研究模型, 并指出针对刚发生事件进行及时处理的实时供应链管理研究模型 (如网上网下渠道协调、动态定价、生产协调等) 将会变得更加重要。Chiang, Chhajer和Hess (2003) 采用由消费者的效用函数导出的需求模型研究了直销、零售以及双

---

<sup>⑤</sup> 根据文献对多渠道的定义 (Tsay 和 Agrawal, 2004), 渠道类型的数目是区分是否为多渠道 (multi-channel) 的标准。例如, 一个制造商对一个 (有多个店铺的) 零售商, 或者一个制造商对多个相互竞争的传统零售商的情形都是单一渠道类型。多渠道必须包含不一样的渠道种类, 例如既有传统零售商, 也有网络零售商的供应链, 或是既有零售商也有直销渠道的供应链。

渠道三种模式下厂商的价格决策对厂商利润的影响,并指出制造商引入直销渠道可能缓解价格双重边际效应,对零售商也有可能有利。然而, Park和Keh (2003) 的研究则指出制造商引入直销渠道对自己始终有利, 但是对零售商始终不利。Hendershott和Zhang (2006) 发现直销渠道对上游厂商有益。在一定条件下, 上游厂商会同时使用直销渠道和传统的零售渠道。另外一些文献研究了增设直销渠道对消费者购买行为的影响。例如Yao和Liu (2003) 研究了直销渠道和零售渠道之间顾客的扩散。他们发现, 在某些条件下, 直销渠道和零售渠道的市场需求会趋向稳定。Bernstein, Song和Zheng (2009) 探讨了当制造商的(高端) 直销渠道作为顾客体验中心提供服务, 零售商可以搭便车(free-ride), 且这种服务的效果会外泄(spill over) 给竞争产品的情况下, 制造商的双渠道决策问题。

近年来, 关于多渠道的研究也引起国内学者的关注。例如, 陈剑、张小洪和常炜(2003) 研究了开设直销渠道后多个制造商之间的数量竞争, 并指出直销渠道的存在不仅能够缓解价格双重边际效应, 同时还会刺激零售渠道销售量的增加。浦徐进、石琴和凌六一(2007) 研究了制造商增设直销渠道影响强势零售商的做法, 发现只有在某些特定的条件下, 制造商增设新的直销渠道才对自己有利。郭亚军和赵礼强(2008) 分析了双渠道定价引起的渠道冲突问题, 指出制造商增设新的直销渠道可以改善自身的利润但会使零售商利润受损, 若要使零售商同时受益则需要引入协调机制。这些文献大多是关于渠道结构的研究, 主要探讨了制造商是否应该开设直销渠道。本文就是在双渠道结构这个前提下, 研究了制造商和零售商的价格、广告之间的动态交互关系。

在供应链管理的文献中关于广告的研究大致可分为两类。一类是合作性的广告。一般是指在纵向供应链中上下游成员共同参与广告活动, 从而提高他们共同的市场需求。在合作性广告投入中, 通常一方(供应商) 会提供激励合同来影响另一方(零售商) 的广告行为。另一类是竞争性的广告。供应链的参与方各自进行广告投入。在纵向供应链中, 当零售商同时持有制作商以及自身品牌(private label) 的产品时, 双方的广告投入可能产生竞争效果。而在供应链的水平竞争中(例如制造商同时通过直销渠道销售自己的产品), 双方的广告活动既可能产生零售和直销渠道的竞争, 也可能产生正向外部性(即一方的广告投入可能对另一方的需求产生正向的影响)。

有关第一类广告的研究最初不考虑上下游成员的博弈, 而是将其视为定价问题。例如Jeuland和Shugan (1983), Moorthy (1987), Ingene和Parry (1995)。在后来的文献中, 研究的焦点集中在激励合同(具体而言是供应商向零售商提供的各种补偿形式) 的设计上。Dant和Berger (1996) 假定供应商向零售商销售的每个商品提供固定的补偿金。Bergen和John (1997) 假定了供应商和零售商一起分担广告成本。Huang和Li (2001) 区分了供应商的广告和零售商的广告, 并且假定零售商仍然会从供应商那里获得补偿。

与合作性广告不同, 竞争性广告是指供应链中的各方投入的广告活动可能引起需求竞

争。Dhar和Hoch（1997），Ailawadi（2001），Ailawadi和Keller（2004）研究了当同时存在供应商的品牌和零售商的品牌时，广告对整个渠道的影响。一方面，供应商的广告投入可以增加自身品牌的影响，提高零售商销售供应商的产品的销售额和利润，当然也可能相应地降低顾客对零售商的品牌的需求。类似的，零售商的广告投入可以提高零售店的形象，这可能提高供应商产品的销售和利润。但是，也可能因为提高了顾客对零售商的品牌信赖程度，而抢走供应商产品的部分需求。Dubé和Manchanda（2005）认为广告发挥的作用是由市场中参与竞争的厂商以及媒体的丰富性决定的。在小的市场中，当媒体种类比较少时，不同产品的广告之间主要表现为竞争关系。如果市场中存在的媒体种类较多时，广告的效应趋向于互补的关系。例如，对一个产品的广告可能使得消费者对同类产品的质量、属性等的认可程度提高，从而扩大总体市场。Karray和Martín-Herrán（2009）则研究了全国品牌和零售店自有品牌同时存在竞争的渠道中，价格和广告的决策以及这些决策之间的关系。

国内在该领域的研究也取得了很好的成果。席酉民和陆晓鸣（1998）通过微分方程描述了销售率与广告投入率之间的关系，从而建立了广告动态最优控制模型。赵道致（1999）研究了消费者在垄断竞争的市场上，品牌选择概率和品牌偏好的动态过程，建立最优定价策略的微分对策模型并给出了最优解。艾兴政和唐小我（2000）基于巴斯模型在非垄断情形所遇到的产品扩散问题，提出了在广告媒介下两种产品的竞争与扩散模型，并对不同情况下产品竞争扩散过程进行了经济分析。齐洁和汪定伟（2004）提出了二维离散广告竞争动态模型，把广告投入作为控制量，采用线性反馈控制，通过数学分析和数值计算，得出了模型中两个状态变量在一定参数下混沌同步（即，不同产品的市场占有率即使初始值不同，经过几个周期的市场作用，市场占有率也将趋于一致）。并且对混沌同步的稳定性进行了分析。而左小德（2006）在完全信息和不完全信息两种情形下，对双寡头垄断市场下企业广告竞争进行了详细研究。齐洁和汪定伟（2007）考虑了竞争性和信息性两种广告对企业市场份额的不同作用。他们提出一个在两强竞争情况下的动态广告投入模型，得到了企业应采取的广告最优控制策略。熊中楷、聂佳佳和李根道（2009）利用微分对策理论研究了多寡头品牌和大类广告策略，提出了一个多方竞争下的微分对策模型。蔡希杰和陈德棉（2008）提供了基于微分博弈理论的广告竞争研究的一份详细综述。同时，张廷、宣慧玉和高宝俊（2008）为了弥补数学模型在描述个体差异方面的不足，建立了一个异质元胞自动机模型，对寡头垄断市场中广告的投放效果进行了仿真研究。他们发现在寡头垄断市场中，当产品差异减少的时候，广告就成为决定产品竞争胜负的关键因素。

本文研究了在制造商既可以通过零售商，又可以通过直销渠道销售产品的双渠道供应链中，二者的广告和价格决策。在双渠道中，价格和广告的交互作用将更加复杂。一方面制造商与零售商的广告可能导致二者在需求上产生竞争（这有可能导致价格的下降）。另一方面二者的广告投入也可能对于增强品牌知名度都有正面的影响。这时广告具有“正外部性”，

促使消费者更倾向于购买（该品牌的）产品（这有可能导致价格的上升）。因此，制造商（或零售商）更高的广告花费究竟会导致直销渠道价格的提高还是降低，以及对零售商的价格会产生何种影响？对这些问题并没有一个直观的答案。

在描述需求（作为价格和声誉的）函数时，我们借鉴了Dubé和Manchanda（2005），以及Karray和Martín-Herrán（2009）。当描述广告的长期效果时，采用了声誉随时间的发展方程（Chintaguta, 1993）。我们的文章与Karray和Martín-Herrán（2009）的主要区别体现在如下方面。首先，Karray和Martín-Herrán（2009）考虑的是单渠道（制造商-零售商）结构下，零售商在销售制造商产品的同时销售自有品牌的情形。而本文研究的是双渠道结构下，零售渠道与直销渠道的竞争。因而，在目标函数设定和博弈次序上二者存在显著不同<sup>®</sup>。因为研究的问题和模型设定的不同，文章的结论也不相同。例如，本文的结论5与Karray和Martín-Herrán（2009）的定理6发现的结论恰好相反。其次，Karray和Martín-Herrán（2009）没有讨论均衡利润。而本文借用最优控制理论得出了均衡利润函数的一些性质。

在这篇文章中，我们将具体回答如下的研究问题。（1）考虑到广告的动态效果，广告与价格之间存在什么关系？（2）当渠道中一个成员改变其广告策略时，另一成员的广告和价格如何变化？（3）在双渠道结构下，广告与价格的关系是否依赖于二者广告的竞争或互补效应？（4）均衡状态下，供应商和零售商的广告对对方利润有何影响？

## 1 模型

本文考虑由一个供应商和一个零售商组成的供应链。供应商生产一种商品，并通过两种渠道将商品销售给顾客：一种是供应商将产品以批发价格卖给零售商，零售商再把该商品以零售价格转售到市场上；另外一种方式是供应商采取直销的方式直接将商品销售到市场。在本文中，供应商和零售商都具备各自的声誉，这些声誉通过做广告累积而得，并会对需求产生影响。由于声誉体现了广告的长期效应，所以本文考虑的是一个多期博弈模型，具体来说，是一个无限期连续动态博弈模型。零售渠道的需求  $D_{Rt}$  和直销渠道的需求  $D_{Mt}$  是价格和声誉的线性函数（Dubé 和 Manchanda, 2005; Karray 和 Martín-Herrán, 2009），具体表达式如下：

$$D_{Rt} = M - P_{Rt} + \varphi_s G_{Rt} + \phi G_{Mt} + \alpha [P_{Mt} - P_{Rt}] \quad (1)$$

$$D_{Mt} = M - P_{Mt} + \varphi G_{Mt} + \theta G_{Rt} + \alpha [P_{Rt} - P_{Mt}] \quad (2)$$

这里， $M$  为正参数，代表市场规模。 $G_{Mt}$ 、 $G_{Rt}$  分别是  $t$  时刻供应商和零售商已经累积的广告声誉。 $t$  时刻零售商的零售价格为  $P_{Rt}$ ，制造商的直销价格为  $P_{Mt}$ 。供应商的直销渠

<sup>®</sup> 具体地，在 Karray 和 Martín-Herrán（2009）的模型中，制造商的决策变量是批发价格和广告，零售商的决策变量是两种产品的零售价格和广告。在我们的模型中，制造商的决策变量是批发价格，直销价格和广告，而零售商的决策变量是单种产品的零售价格和广告。

道和零售商的渠道之间存在价格竞争。 $P_{Mt}$ 的高低会影响到零售渠道的需求 $D_{Rt}$ 。这种影响是通过 $P_{Mt}$ 和零售价格 $P_{Rt}$ 的比较起作用的，即， $P_{Mt} - P_{Rt}$ 是影响零售渠道需求 $D_{Rt}$ 的重要因素之一。这里我们假设 $\alpha \in (0,1)$ ，即相对于 $P_{Rt}$ ， $P_{Mt} - P_{Rt}$ 对 $D_{Rt}$ 的影响略弱。广告决策对实际需求的影响是通过供应商和零售商已经积累的声誉来发挥作用的。零售商自身的声誉 $G_{Rt}$ 对自身的市场需求 $D_{Rt}$ 的影响是正的，敏感程度由 $\varphi_s > 0$ 决定。由于零售商和供应商之间既有合作又有竞争，因此供应商的声誉 $G_{Mt}$ 对 $D_{Rt}$ 的影响不是单纯的正向或者负向，这里假设敏感系数为 $\phi$ ，但是 $\phi$ 的符号不定。

同样的， $D_{Mt}$ 受到四种因素的影响：供应商的直销价格 $P_{Mt}$ 、价格差 $P_{Rt} - P_{Mt}$ ，供应商的声誉 $G_{Mt}$ 和零售商的声誉 $G_{Rt}$ 。和前面的分析相同，供应商自身的声誉 $G_{Mt}$ 对自身的市场需求 $D_{Mt}$ 的影响是正的，敏感程度由 $\varphi > 0$ 决定。零售商的声誉 $G_{Rt}$ 对供应商的市场需求 $D_{Mt}$ 的影响由敏感系数 $\theta$ 决定， $\theta$ 可正可负。

广告的长期效应是通过声誉的增加量来反映的。依据系统动力学，可以用声誉对时间的变化率来测量。供应商和零售商的声誉对时间的变化率分别为 $\partial G_{Mt} / \partial t$ 和 $\partial G_{Rt} / \partial t$ 。在 $t$ 时刻，供应商（零售商）的声誉随着广告支出费用的增加而增加。同时根据 Nerlove 和 Arrow（1962）的观点，广告声誉的积累量会随着时间的增加而贬值。这是因为随着时间的增加，消费者会忘记之前的一些广告活动，我们假设声誉的衰减速度恒定，用 $\lambda$ 来表示衰减率。另外一方面，根据 Chintagunta（1993）的研究发现，广告对声誉的增加量的边际影响是递减的。因此，得出下面的关系式（Karray 和 Martín-Herrán，2009）：

$$\begin{aligned}\frac{\partial G_{Mt}}{\partial t} &= \delta \sqrt{A_{Mt}} - \lambda G_{Mt}, \quad G_M(0) = G_{M0} > 0 \\ \frac{\partial G_{Rt}}{\partial t} &= \delta \sqrt{A_{Rt}} - \lambda G_{Rt}, \quad G_R(0) = G_{R0} > 0\end{aligned}$$

其中， $\delta$ 、 $\lambda$ 为正参数。 $G_{M0}$ ， $G_{R0}$ 分别代表供应商和零售商的初始广告声誉。

本文中供应商与零售商之间的交互作用被描述为动态博弈。供应商作为 Stackelberg 博弈的领导者，制定批发价格、直销价格和广告策略。零售商作为跟随者，在观察到供应商的决策之后，选择自己最优的零售价格和广告投入。我们假设所有的信息都为各方所知。这是一个完全信息的动态微分博弈。供应商和零售商的无穷期利润函数分别为：

$$\begin{aligned}\pi_M &= \int_0^{\infty} e^{-rt} [w_t D_{Rt} + P_{Mt} D_{Mt} - \frac{\mu}{2} A_{Mt}] dt \\ \pi_R &= \int_0^{\infty} e^{-rt} [(P_{Rt} - w_t) D_{Rt} - \frac{\mu}{2} A_{Rt}] dt\end{aligned}$$

这里我们假设供应商的单位生产成本为0。 $\mu$ 是广告投入的成本系数。因而，每期的净收益是产品销售利润减去广告成本。 $0 < r < 1$ 为折现因子。借鉴 Karray 和 Martín-Herrán（2009）

的模型，我们假设供应商和零售商的广告成本系数（ $\mu$ ）和折现因子（ $r$ ）相同。

## 2 模型求解

本节我们通过求解上述模型来讨论均衡价格和均衡广告策略。在求解部分，我们假设价格和广告的均衡策略为非负。供应商和零售商的最优化决策问题分别为：

$$\begin{aligned} \max_{w_t, P_{Mt}, A_{Mt}} &= \int_0^{\infty} e^{-rt} [w_t D_{Rt} + P_{Mt} D_{Mt} - \frac{\mu}{2} A_{Mt}] dt \\ \text{s.t.} & \frac{\partial G_{Mt}}{\partial t} = \delta \sqrt{A_{Mt}} - \lambda G_{Mt}, G_M(0) = G_{M0} > 0 \end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned} \max_{P_{Rt}, A_{Rt}} &= \int_0^{\infty} e^{-rt} [(P_{Rt} - w_t) D_{Rt} - \frac{\mu}{2} A_{Rt}] dt \\ \text{s.t.} & \frac{\partial G_{Rt}}{\partial t} = \delta \sqrt{A_{Rt}} - \lambda G_{Rt}, G_R(0) = G_{R0} > 0 \end{aligned}$$

其中，供应商和零售商的需求函数如式（1）、（2）所示。

此模型是一个连续时间的动态规划问题。求解过程需要用到 Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) 方程。用  $V_M(G_M, G_R)$  和  $V_R(G_M, G_R)$  分别表示上述动态规划问题的贴现值函数（对应的值函数为  $J(t, G_M, G_R) = e^{-rt} V(G_M, G_R)$ ）。

则供应商和零售商的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程为

$$rV_M(G_M, G_R) = \max_{w_t, P_{Mt}, A_{Mt}} \{w_t D_{Rt} + P_{Mt} D_{Mt} - \frac{\mu}{2} A_{Mt} + \frac{\partial V_M}{\partial G_M} [\delta \sqrt{A_M} - \lambda G_M]\} \quad (3)$$

$$rV_R(G_M, G_R) = \max_{P_{Rt}, A_{Rt}} \{(P_{Rt} - w_t) D_{Rt} - \frac{\mu}{2} A_{Rt} + \frac{\partial V_R}{\partial G_R} [\delta \sqrt{A_R} - \lambda G_R]\} \quad (4)$$

并且只有当  $A_M$ ， $A_R$  满足最优性条件  $\sqrt{A_M} = \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_M}{\partial G_M}$ ， $\sqrt{A_R} = \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_R}{\partial G_R}$  时，（3）（4）两式

右端项才能取到最大值（参见《动态经济学方法》第 245 至 250 页）。

仔细观察（3）（4）两式右端项，发现  $\frac{\partial V_R}{\partial G_R} [\delta \sqrt{A_R} - \lambda G_R]$ ， $\frac{\partial V_M}{\partial G_M} [\delta \sqrt{A_M} - \lambda G_M]$  与

价格无关。所以，当对最优价格求解时，问题可简化为如何选取价格使得每期利润，即  $(P_{Rt} - w_t) D_{Rt} - \frac{\mu}{2} A_{Rt}$  和  $w_t D_{Rt} + P_{Mt} D_{Mt} - \frac{\mu}{2} A_{Mt}$ ，最大。因而，我们对均衡策略的求解顺序为：先解出均衡价格，然后再求解均衡广告策略。

## 2.1 均衡价格

从上述讨论中我们知道供应商和零售商面临的价格决策可以转化为求解下列利润最大化问题。

$$\max_{w_t, P_{M_t}} [w_t D_{R_t} + P_{M_t} D_{M_t} - \frac{\mu}{2} A_{M_t}] \quad (5)$$

$$\max_{P_{R_t}} [(P_{R_t} - w_t) D_{R_t} - \frac{\mu}{2} A_{R_t}] \quad (6)$$

上述利润最大化问题的解由下述结论 1 给出（所有结论的证明见附录）。

**结论 1:** 供应商的均衡直销价格和批发价格分别为：

$$P_{M_t}^*(G_{M_t}, G_{R_t}) = \frac{M}{2} + \frac{(\alpha\phi + \phi(1+\alpha))G_{M_t} + (\alpha\phi_s + \theta(1+\alpha))G_{R_t}}{2(1+2\alpha)}$$

$$w_t^*(G_{M_t}, G_{R_t}) = \frac{M}{2} + \frac{(\alpha\phi + \phi(1+\alpha))G_{M_t} + (\alpha\theta + \phi_s(1+\alpha))G_{R_t}}{2(1+2\alpha)};$$

零售商的最优零售价格为：

$$P_{R_t}^*(G_{M_t}, G_{R_t}) = \frac{M(2\alpha+3)}{4(1+\alpha)} + \frac{[(2\alpha^2+6\alpha+3)\phi+2\alpha(1+\alpha)\phi]G_{M_t} + [(2\alpha^2+6\alpha+3)\phi_s+2\alpha(1+\alpha)\theta]G_{R_t}}{4(1+\alpha)(1+2\alpha)}$$

而在均衡状态下，零售渠道和供应商直销渠道的需求分别为：

$$D_{R_t}^*(G_{M_t}, G_{R_t}) = \frac{M + \phi G_{M_t} + \phi_s G_{R_t}}{4}$$

$$D_{M_t}^*(G_{M_t}, G_{R_t}) = \frac{2M + 3M\alpha + [\alpha\phi + 2(1+\alpha)\phi]G_{M_t} + [\alpha\phi_s + 2(1+\alpha)\theta]G_{R_t}}{4(1+\alpha)}$$

由此可见，供应商和零售商的声誉对均衡价格以及需求的影响比较复杂。尽管零售商的声誉对自身的需求有促进作用，其声誉与自身的零售价格却不一定是正相关的。在  $\theta < -(2\alpha^2 + 6\alpha + 3)\phi_s / (2\alpha(1+\alpha))$  时，两者是负相关的。这可以解释如下：在零售商的声誉对供应商的直销渠道的需求有很强的竞争效果时（即  $\theta$  为负且较小），供应商被迫采用降低价格的策略（当  $\theta < -(2\alpha^2 + 6\alpha + 3)\phi_s / (2\alpha(1+\alpha))$  时，可以验证  $\alpha\phi_s + \theta(1+\alpha) < 0$ ，因而零售商声誉的增加会导致供应商直销价格的降低），从而导致零售商不得不随之降价。当供应商的声誉对零售商的需求起很强的负作用时（ $\phi < -2(1+\alpha)\phi / \alpha$ ），供应商的声誉与自己的需求、直销价格、批发价格以及零售商的需求、零售价格都是负相关的。这是由于在这种情

形下，零售商必须降低价格来扩大需求，从而压低了供应商的直销价格和批发价格。对于两者的需求，虽然价格降低会缓解需求下降的趋势，但是由于两者之间的竞争过于激烈，各自的声誉对对方的负方向影响仍然占据主导地位，从而各自的需求都会下降。详细的讨论见下文的结论 3 和结论 4。

## 2.2 均衡广告策略

将 2.1 中的有关价格的结论代入到 HJB 方程中，得到以下两个方程：

$$rV_M(G_M, G_R) = \max_{A_M} \{w_t^* D_{Rt}^* + P_{Mt}^* D_{Mt}^* - \frac{\mu}{2} A_{Mt} + \frac{\partial V_M}{\partial G_M} [\delta \sqrt{A_M} - \lambda G_M]\} \quad (7)$$

$$rV_R(G_M, G_R) = \max_{A_R} \{(P_{Rt}^* - w_t^*) D_{Rt}^* - \frac{\mu}{2} A_{Rt} + \frac{\partial V_R}{\partial G_R} [\delta \sqrt{A_R} - \lambda G_R]\} \quad (8)$$

对 (7) (8) 两式求解，我们可以得到如下述结论 2 给出的最优广告策略。

**结论 2:** 供应商和零售商的最优广告策略分别为：

$$A_M^* = \left[ \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_M}{\partial G_M}(G_M, G_R) \right]^2 = \left[ \frac{\delta}{\mu} (T_1 G_M + T_3 G_R + T_4) \right]^2$$

$$A_R^* = \left[ \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_R}{\partial G_R}(G_M, G_R) \right]^2 = \left[ \frac{\delta}{\mu} (R_2 G_R + R_3 G_M + R_5) \right]^2$$

其中， $G_M = B_1 e^{\xi_1 t} + B_2 e^{\xi_2 t} + G_M^\infty$ ，

$$G_R = B_1 \mu \frac{\xi_1 + \lambda - \frac{\delta^2}{\mu} T_1^\pm}{\delta^2 T_3^\pm} e^{\xi_1 t} + B_2 \mu \frac{\xi_2 + \lambda - \frac{\delta^2}{\mu} T_1^\pm}{\delta^2 T_3^\pm} e^{\xi_2 t} + G_R^\infty, \text{ 参数的定义详见证明过程。}$$

在求解有关声誉的微分方程组时，我们定义了如下两个参数。

$$C_1 = \frac{\delta^2}{\mu} (T_1^\pm + R_2^\pm) - 2\lambda, \quad C_2 = \left( \frac{\delta^2}{\mu} T_1^\pm - \lambda \right) \left( \frac{\delta^2}{\mu} R_2^\pm - \lambda \right) - \frac{\delta^4}{\mu^2} T_3^\pm R_3^\pm。$$

为了保证  $(G_M^\infty, G_R^\infty)$  是全局渐进稳定解，需要  $C_1 < 0, C_2 > 0$ 。（参见证明过程。 $C_1$  和  $C_2$  是与特征根相关的参数，当  $C_1 < 0, C_2 > 0$  时，特征根为负。此时，微分方程组的解是全局渐进稳定解（参见《动态经济学方法》第 60 页）。所以在下面的讨论中，我们都假定模型的参数满足  $C_1 < 0$ 。

将上面求得均衡价格、广告、需求代入到供应商和零售商的无限期利润函数里，即可计算出供应商和零售商各自的均衡利润。

### 3 关于模型结果的一些讨论

**引理 1:** 在均衡状态下, 供应商 (零售商) 的广告与它的声誉正相关:

$$\frac{\partial A_M^*}{\partial G_M} > 0, \quad \frac{\partial A_R^*}{\partial G_R} > 0$$

由引理 1 我们知道可以通过研究声誉与需求、价格和利润的关系来讨论广告对这些变量的影响。例如, 由于

由于  $\frac{\partial w_M^*}{\partial G_M} = \frac{\partial w_M^*}{\partial A_M^*} \frac{\partial A_M^*}{\partial G_M}$ ,  $\frac{\partial w_M^*}{\partial G_R} = \frac{\partial w_M^*}{\partial A_R^*} \frac{\partial A_R^*}{\partial G_R}$ , 所以根据引理 1:

$$\text{sign}\left(\frac{\partial w_M^*}{\partial G_M}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial w_M^*}{\partial A_M^*}\right), \quad \text{sign}\left(\frac{\partial w_M^*}{\partial G_R}\right) = \text{sign}\left(\frac{\partial w_M^*}{\partial A_R^*}\right)。$$

因此,  $w_M^*$  对广告投入  $A_M$ ,  $A_R$  的敏感性分析可以转化为对声誉  $G_M$ ,  $G_R$  的敏感性分析。

**结论 3<sup>①</sup>:** 在均衡状态下, 供应商的广告与供应商的批发价格  $w_M^*$ 、直销价格  $P_M^*$  以及零售商的零售价格  $P_R^*$  的关系是: 随着供应商的广告投入的增加,

- 1) 当  $\frac{\phi}{\varphi} > -\frac{\alpha}{1+\alpha}$  时,  $w_M^*$ 、 $P_M^*$  以及  $P_R^*$  都会相应增加。
- 2) 当  $-\frac{1+\alpha}{\alpha} < \frac{\phi}{\varphi} < -\frac{\alpha}{1+\alpha}$  时,  $w_M^*$  增加,  $P_M^*$  降低,  $P_R^*$  增加。
- 3) 当  $-\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha(1+\alpha)} < \frac{\phi}{\varphi} < -\frac{1+\alpha}{\alpha}$  时,  $w_M^*$  和  $P_M^*$  降低,  $P_R^*$  增加。
- 4) 当  $\frac{\phi}{\varphi} < -\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha(1+\alpha)}$  时,  $w_M^*$  和  $P_M^*$  降低,  $P_R^*$  降低。

由于在该模型下, 存在两种销售渠道: 零售渠道和直销渠道。零售商和供应商之间既有合作, 又有竞争。广告  $A_M$  对批发价格  $w^*$ , 直销和零售价格  $P_M^*$ 、 $P_R^*$  的影响既可能是正方向也可能是负方向。正负向的变化与参数  $\phi$ ,  $\varphi$  有关。注意到  $\phi$  为供应商的声誉  $G_{M_t}$  对零售商需求  $D_{R_t}$  的影响的敏感系数。  $\varphi$  为供应商的声誉  $G_{M_t}$  对自身需求  $D_{M_t}$  的影响的敏感系数, 且  $\varphi > 0$ 。这两个系数之间的关系表明供应商的声誉  $G_{M_t}$  对  $D_{M_t}$  和  $D_{R_t}$  的影响程度的相对大小。当  $\phi$  和  $\varphi$  的关系在某个范围时, 供应商和零售商呈现出更多的合作关系, 当在其他的范围时, 二者呈现出更多的竞争关系。因此, 供应商的广告投入  $A_M$  对  $w^*$ 、 $P_M^*$  以及  $P_R^*$  的影

<sup>①</sup>本结论与 Karray 和 Martín-Herrán (2009) 的定理 4 有相似和不同之处。首先, 两篇文章的均衡价格解不同。有意思的是, 结论 3 与定理 4 存在相同的分段点。但是不同的是, 结论 3 的分段区间多于定理 4, 即区间  $(-(1+\alpha)/\alpha, -\alpha/(1+\alpha))$ 。结论 4 与定理 5 的关系类似。

响随着供应商和零售商二者之间的合作性和竞争性的相对强度的变化而变化。具体的，当制造商的广告投入对零售商的需求起到补充或者尽管是竞争作用，但是竞争强度不大时，零售价格会随着制造商广告投入的增加而上升；当竞争强度较大时，零售价格则随着制造商广告投入的增加而下降。这补充了以往文献对广告和价格之间的关系认识。即当供应商的广告不会引起激烈竞争时，其广告投入的增加主要起到了提升品牌总体形象和消费者认知度的作用，从而零售价格会有所提高（这与 Nelson, 1974; Bagwell 和 Ramey, 1994 的结论一致）。反之，当供应商的广告使得供应商与零售商激烈竞争顾客时，竞争会导致零售价格的下降（这与 Gossman 和 Shapiro, 1984; Robert 和 Stahl, 1993 的结论类似）。

**结论 4:** 在均衡状态下，零售商的广告与供应商的批发价格  $w_M^*$ 、直销价格  $P_M^*$  以及零售商的零售价格  $P_R^*$  的关系是：随着零售商的广告投入的增加，

- 1) 当  $\frac{\varphi_s}{\theta} > -\frac{\alpha}{1+\alpha}$  时， $w_M^*$ 、 $P_M^*$  以及  $P_R^*$  都会相应增加。
- 2) 当  $-\frac{1+\alpha}{\alpha} < \frac{\varphi_s}{\theta} < -\frac{\alpha}{1+\alpha}$  时， $w_M^*$  增加， $P_M^*$  降低， $P_R^*$  增加。
- 3) 当  $-\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha(1+\alpha)} < \frac{\varphi_s}{\theta} < -\frac{1+\alpha}{\alpha}$  时， $w_M^*$  和  $P_M^*$  降低， $P_R^*$  增加。
- 4) 当  $\frac{\varphi_s}{\theta} < -\frac{2\alpha^2+6\alpha+3}{2\alpha(1+\alpha)}$  时， $w_M^*$  和  $P_M^*$  降低， $P_R^*$  降低。

该结论类似于结论 3。零售商的广告投入  $A_R$  对  $w^*$ 、 $P_M^*$  和  $P_R^*$  的影响的正负向与参数  $\varphi_s$ ， $\theta$  有关。注意到  $\varphi_s$  为零售商的声誉  $G_{R_t}$  对自身需求  $D_{R_t}$  的影响的敏感系数，且  $\varphi_s > 0$ ； $\theta$  为零售商的声誉  $G_{R_t}$  对供应商的需求  $D_{M_t}$  的影响的敏感系数。这两个系数之间的关系表明了零售商的声誉  $G_{R_t}$  对  $D_{R_t}$  和  $D_{M_t}$  的影响程度的相对大小。当  $\varphi_s$ ， $\theta$  的关系在某个范围时，供应商和零售商呈现出更多的合作关系，当在其他的范围时，二者呈现出更多的竞争关系。因此，零售商的广告投入  $A_R$  对  $w^*$ 、 $P_M^*$  以及  $P_R^*$  的影响随着供应商和零售商二者之间的合作性和竞争性的相对强度的变化而变化。由于制造商可以从两个渠道获利，其直销渠道的价格随零售商广告投入增加的变化情况则比较复杂。当零售商的广告投入对制造商的需求起到补充作用时，制造商的直销价格会相应提高。如果零售商的广告投入对制造商的需求起到较强的竞争作用，此时零售商增加广告投入时，由于广告所产生的竞争作用激烈，制造商无法通过降低直销价格有效挽回顾客流失，此时，制造商反而会主动提高直销价格（同时提高批发价格）而将顾客“赶到”零售渠道，从而期望从零售商渠道增长的需求中获利。这意味着对于制造商而言，当其渠道结构比较复杂时（既可从直销渠道也可从零售渠道销售获利），制造商不能简单的依赖主观判断调整直销价格来应对零售商广告投入的变化。例如，面对零售商广告的激烈竞争，制造商采取提价降低直销渠道的销售量来换取批发量的增加可能会更

有利。

对零售商的广告策略，有以下结果：

**结论 5：**当  $C_1 < 0$  时（ $C_1$  的定义见结论 2 的证明），在均衡状态下，零售商与供应商的广告之间的关系依赖于供应商的广告对零售商需求的影响效果。当这种效果是竞争性时（ $\phi < 0$ ），二者的广告之间是正相关的。当这种效果是补充性时（ $\phi > 0$ ），二者的广告之间是负相关的。

此结论表明，当供应商的广告会降低零售商的需求时（ $\phi < 0$ ），二者的广告投入也表现出竞争关系，即供应商的广告投入增加时，零售商也会增加自己的广告投入。相反，当供应商的广告会增加零售商的需求时（ $\phi > 0$ ），零售商可能会搭顺风车，在供应商的广告投入增加时反而减少自己的广告投入成本。

**结论 6：**当  $\theta > -\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\phi_s$  时，供应商的利润会随着零售商增大广告投入而增加。

该结论表明当零售商的广告对供应商起到的是补充作用（ $\theta > 0$ ），或者尽管是竞争作用，但是竞争强度不大时（ $-\alpha\phi_s / (2(1+\alpha)) < \theta < 0$ ），供应商的利润会随着零售商增大广告投入而增加。

**结论 7：**当供应商的广告对零售商起补充作用时（ $\phi > 0$ ），零售商的利润随着供应商广告投入的增加而增加；反之，当供应商的广告对零售商起竞争作用时（ $\phi < 0$ ），零售商的利润随着供应商广告投入的增加而减少。

比较结论 6 和结论 7，我们可以发现，相对供应商来说，零售商的利润对于对方广告是竞争还是补充作用更加敏感。即，当供应商的广告起到竞争作用时，零售商的利润永远随对方广告投入的增加而减少。而对于供应商，即便零售商的广告起竞争作用，也存在利润随对方广告投入的增加而增长的可能。上述差别是由于零售商的利润来源单一，而供应商可以同时通过直销和批发给零售商获利。当零售商的广告对供应商的直销渠道是竞争作用时，零售商广告投入的增加会减少直销渠道的需求。但是另一方面，零售渠道的需求会增大从而增加供应商的批发销售利润。当广告的竞争不很激烈时，增加的批发销售利润可能超过直销渠道的利润损失，此时供应商反而可能从零售商增大广告投入的活动中受益。反过来，对于零售商而言，当供应商增加竞争性的广告投入时，零售商只会面临市场需求的减少。因而其利润随供应商广告投入的增加而减少。结论 6 和 7 表明，相对于供应商，零售商应该更注意市场调查来研究供应商的广告效果。

## 4 结论

本文引入了动态分析模型，研究了在广告和声誉存在的情况下，双渠道结构中的均衡价格、广告策略。广告通过声誉的微分方程来影响最终需求。供应商和零售商都有广告投入，也同时具有各自的声誉积累。在本文中，我们只讨论一种产品，但是基于两种不同的销售渠道：一种是零售渠道，这时供应商和零售商之间是合作关系；另一种是供应商的直销渠道，这时二者之间是竞争关系。通过无限期连续动态分析，我们得出以下结论：在双渠道结构下，

1) 供应商的批发价格和直销价格、零售商的零售价格随着二者的广告投入的变化方向既可能是正向的，也可能是负向的。具体的变化方向会依赖于二者之间的合作性和竞争性的相对强度。

2) 供应商和零售商两者的广告关系具体表现为：当供应商的广告对零售商起补充作用时，两者负相关；反之，如果供应商的广告对零售商起竞争作用时，两者是正相关的。

3) 均衡状态下，供应商的广告对零售商的利润的影响完全依赖于广告是补充性的还是竞争性的：当广告起补充作用时，零售商的利润随着供应商广告投入的增加而增大，反之，则零售商的利润随之减少。而当零售商的广告对供应商起到的是补充作用，或者尽管是竞争作用，但是竞争强度不大时，供应商的利润都会随着零售商增加广告投入而增长。

这些结论对文献是一种补充，也能为企业带来一些有意义的启示。例如我们发现广告和价格的关系依赖于市场条件。当供应商的广告不会引起激烈竞争，而主要起到了提升品牌形象（从而对双方需求有利时），其广告投入的增加会引起零售价格上涨（这与 Nelson, 1974; Bagwell 和 Ramey, 1994 的结论一致）。反之，当供应商的广告使得供应商与零售商激烈竞争顾客时，零售价格会下降（这与 Gossman 和 Shapiro, 1984; Robert 和 Stahl, 1993 的结论类似）。而对于制造商，由于可以“操控”两个渠道，制造商在面对零售商广告的激烈竞争时，通过提价降低直销渠道的销售量来换取批发量的增加可能会更有利。在双渠道结构下，零售商的利润对于对方广告是竞争还是补充作用更加敏感。因此，零售商更应该进行市场调查了解供应商广告对自身的影响。而制造商则可以不用顾虑零售商的一些比较温和的竞争性广告。

本文的研究也存在一定的局限，虽然相对于以往的研究，我们给出了供应商和零售商的利润的均衡解，并发现了一些有趣的结论。由于利润解的形式过于复杂，很难对利润进行关于外生参量的比较静态分析<sup>®</sup>。因此，进一步的研究工作可以利用模拟运算，分析外生变量  $\phi$ 、 $\theta$  和  $\varphi_s$  等对利润的影响。

## 附录

### 结论 1 的证明：

供应商和零售商面临的价格最优问题如正文 (5) (6) 所示。对 (6)，由一阶条件可知：

---

<sup>®</sup> 制造商和零售商的均衡利润表达式非常复杂，在定义了十个中间变量之后，表达式仍然有几十项。

$$(P_{Rt} - w_t)(-1 - \alpha) + M - P_{Rt} + \varphi_s G_{Rt} + \phi G_{Mt} + \alpha[P_{Mt} - P_{Rt}] = 0$$

所以零售商的最优价格反应函数是：

$$P_{Rt}(w_t, P_{Mt}, G_{Mt}, G_{Rt}) = \frac{M + (1 + \alpha)w_t + \phi G_{Mt} + \varphi_s G_{Rt} + \alpha P_{Mt}}{2(1 + \alpha)}$$

将此反应函数代入 (5)，并对  $w_t, P_{Mt}$  分别求导，联合求解  $w_t, P_{Mt}$ ，得到：

$$P_{Mt}^*(G_{Mt}, G_{Rt}) = \frac{M}{2} + \frac{(\alpha\phi + \varphi(1 + \alpha))G_{Mt} + (\alpha\varphi_s + \theta(1 + \alpha))G_{Rt}}{2(1 + 2\alpha)}$$

$$w_t^*(G_{Mt}, G_{Rt}) = \frac{M}{2} + \frac{(\alpha\varphi + \phi(1 + \alpha))G_{Mt} + (\alpha\theta + \varphi_s(1 + \alpha))G_{Rt}}{2(1 + 2\alpha)}$$

将这两个等式代入零售商的价格反应函数以及需求函数，即可得结论 1 的结果。

### 结论 2 的证明：

供应商和零售商的 Hamilton-Jacobi-Bellman 方程为 (7) (8) 两式。

采用待定系数法，假设方程 (7) (8) 的解分别是：

$$V_M(G_M, G_R) = \frac{T_1}{2} G_M^2 + \frac{T_2}{2} G_R^2 + T_3 G_M G_R + T_4 G_M + T_5 G_R + T_6$$

$$V_R(G_M, G_R) = \frac{R_1}{2} G_M^2 + \frac{R_2}{2} G_R^2 + R_3 G_M G_R + R_4 G_M + R_5 G_R + R_6$$

同时作如下变量替换：

$$u_M = \sqrt{A_M}, \quad u_R = \sqrt{A_R}$$

其中的  $T_i (i = 1, 2, \dots, 6)$ ， $R_i (i = 1, 2, \dots, 6)$  为待定的系数。

将假定的解分别代入 HJB 方程，注意到均衡价格和均衡需求我们已经求出，将它们也一并代入 HJB 方程中，然后比较方程两端系数，可得：

$$T_1 = \frac{\mu(2\lambda + r)}{2\delta^2} \pm \frac{\sqrt{(\mu(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)(2\lambda + r))^2 - \delta^2 \mu(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)X}}{2\delta^2(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)}$$

$$T_3 = -\mu \frac{[2\alpha(1 + \alpha)\theta + (2\alpha^2 + 2\alpha + 1)\varphi_s]\phi + [3\alpha(1 + \alpha)\varphi_s + 2(1 + \alpha)^2\theta]\varphi}{8(1 + \alpha)(1 + 2\alpha)[T_1\delta^2 - (r + \lambda)\mu]}$$

$$T_4 = -\mu M \frac{(1 + 2\alpha)\phi + 2(1 + \alpha)\varphi}{4(1 + \alpha)[T_1\delta^2 - (r + \lambda)\mu]}$$

$$R_2 = \frac{\mu(2\lambda + r)}{2\delta^2} \pm \frac{\sqrt{(2\mu(1 + \alpha)(2\lambda + r))^2 - 2\delta^2 \mu(1 + \alpha)\varphi_s}}{4\delta^2(1 + \alpha)}$$

$$R_3 = \frac{\mu\phi\varphi_s}{8(1 + \alpha)[R_2\delta^2 - (r + \lambda)\mu]}, \quad R_5 = \frac{\mu\phi M}{8(1 + \alpha)[R_2\delta^2 - (r + \lambda)\mu]}$$

其中,  $X = \alpha^2\phi^2 + 2(1+\alpha)^2\phi^2 + (3\alpha^2 + 4\alpha)\phi\phi$ 。

假设  $(\mu(1+\alpha)(1+2\alpha)(2\lambda+r))^2 - \delta^2\mu(1+\alpha)(1+2\alpha)X > 0$ ,

$$(2\mu(1+\alpha)(2\lambda+r))^2 - 2\delta^2\mu(1+\alpha)\phi_s > 0$$

则  $T_1$ 、 $R_2$  为实数解。由一阶条件, 可得:

$$\begin{aligned}\sqrt{A_M} &= \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_M}{\partial G_M} = \frac{\delta}{\mu} [T_1 G_M + T_3 G_R + T_4] \\ \sqrt{A_R} &= \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_R}{\partial G_R} = \frac{\delta}{\mu} [R_2 G_R + R_3 G_M + R_5]\end{aligned}$$

为保证广告为正数, 则要求  $T_1 G_M + T_3 G_R + T_4 > 0$ ,  $R_2 G_R + R_3 G_M + R_5 > 0$ 。

由此可以得到, 供应商和零售商的最优广告策略分别为:

$$\begin{aligned}A_M^* &= \left[ \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_M}{\partial G_M}(G_M, G_R) \right]^2 = \left[ \frac{\delta}{\mu} (T_1 G_M + T_3 G_R + T_4) \right]^2 \\ A_R^* &= \left[ \frac{\delta}{\mu} \frac{\partial V_R}{\partial G_R}(G_M, G_R) \right]^2 = \left[ \frac{\delta}{\mu} (R_2 G_R + R_3 G_M + R_5) \right]^2\end{aligned}$$

至此, 我们已经把价格和广告策略均表示为声誉的函数, 只需将声誉求出, 就可以得到所有策略的显性解。关于声誉的微分方程为:

$$\frac{\partial G_{Mt}}{\partial t} = \delta \sqrt{A_{Mt}} - \lambda G_{Mt}, \quad \frac{\partial G_{Rt}}{\partial t} = \delta \sqrt{A_{Rt}} - \lambda G_{Rt}$$

将广告的解代入上面的偏微分方程组中, 得到如下微分方程组:

$$\frac{\partial G_{Mt}}{\partial t} = \frac{\delta^2}{\mu} [T_1 G_M + T_3 G_R + T_4] - \lambda G_{Mt}, \quad \frac{\partial G_{Rt}}{\partial t} = \frac{\delta^2}{\mu} [R_2 G_R + R_3 G_M + R_5] - \lambda G_{Rt}$$

另外, 初始条件为  $G_M(0) = G_{M0} > 0$ ,  $G_R(0) = G_{R0} > 0$ 。解得微分方程组的解为:

$$G_M(t) = B_1 e^{\xi_1 t} + B_2 e^{\xi_2 t} + G_M^\infty$$

$$G_R(t) = B_1 \mu \frac{\xi_1 + \lambda - \frac{\delta^2}{\mu} T_1^\pm}{\delta^2 T_3^\pm} e^{\xi_1 t} + B_2 \mu \frac{\xi_2 + \lambda - \frac{\delta^2}{\mu} T_1^\pm}{\delta^2 T_3^\pm} e^{\xi_2 t} + G_R^\infty$$

$$\text{其中, } G_M^\infty = \frac{\delta^2 [\delta^2 T_3^\pm R_5^\pm - T_4^\pm (R_2^\pm \delta^2 - \lambda \mu)]}{(T_1^\pm \delta^2 - \lambda \mu)(R_2^\pm \delta^2 - \lambda \mu) - T_3^\pm R_3^\pm \delta^4},$$

$$G_R^\infty = \frac{\delta^2[\delta^2 T_4^\pm R_3^\pm - R_5^\pm(T_1^\pm \delta^2 - \lambda\mu)]}{(T_1^\pm \delta^2 - \lambda\mu)(R_2^\pm \delta^2 - \lambda\mu) - T_3^\pm R_3^\pm \delta^4}$$

$$B_1 = \frac{(G_R^\infty - G_{R0})T_3^\pm \delta^2 + (G_M^\infty - G_{M0})(T_1^\pm \delta^2 - \mu(\lambda + \xi_2))}{\mu(\xi_2 - \xi_1)}$$

$$B_2 = -\frac{(G_R^\infty - G_{R0})T_3^\pm \delta^2 + (G_M^\infty - G_{M0})(T_1^\pm \delta^2 - \mu(\lambda + \xi_1))}{\mu(\xi_2 - \xi_1)}$$

$$\xi_1 = \frac{C_1 + \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}, \quad \xi_2 = \frac{C_1 - \sqrt{C_1^2 - 4C_2}}{2}$$

$$C_1 = \frac{\delta^2}{\mu}(T_1^\pm + R_2^\pm) - 2\lambda, \quad C_2 = \left(\frac{\delta^2}{\mu}T_1^\pm - \lambda\right)\left(\frac{\delta^2}{\mu}R_2^\pm - \lambda\right) - \frac{\delta^4}{\mu^2}T_3^\pm R_3^\pm$$

**引理 1 的证明:**

通过计算得出:

$$\frac{\partial A_M^*}{\partial G_M}(G_M, G_R) = \frac{2\delta^2}{\mu^2}T_1(T_1 G_M + T_3 G_R + T_4), \quad \frac{\partial A_R^*}{\partial G_R}(G_M, G_R) = \frac{2\delta^2}{\mu^2}R_2(R_2 G_R + R_3 G_M + R_5)$$

由前面的求解分析, 知  $T_1 > 0$ ,  $R_2 > 0$ ,  $T_1 G_M + T_3 G_R + T_4 > 0$ ,  $R_2 G_R + R_3 G_M + R_5 > 0$ ,

因此, 有  $\frac{\partial A_M^*}{\partial G_M}(G_M, G_R) > 0$ ,  $\frac{\partial A_R^*}{\partial G_R}(G_M, G_R) > 0$ 。

**结论 3 的证明:**

$$\text{容易计算得出: } \frac{\partial w^*}{\partial G_M} = \frac{\alpha\phi + \phi(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)}, \quad \frac{\partial P_M^*}{\partial G_M} = \frac{\alpha\phi + \phi(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)},$$

$\frac{\partial P_R^*}{\partial G_M} = \frac{(2\alpha^2 + 6\alpha + 3)\phi + 2\alpha(\alpha + 1)\theta}{4(\alpha + 1)(2\alpha + 1)}$ , 并且  $\alpha > 0$ 。所以当有关参数满足结论 3 中的各种

条件时, 我们很容易判断出  $\frac{\partial w^*}{\partial G_M}$ ,  $\frac{\partial P_M^*}{\partial G_M}$  和  $\frac{\partial P_R^*}{\partial G_M}$  的符号。

**结论 4 的证明:**

$$\text{容易计算出: } \frac{\partial w^*}{\partial G_R} = \frac{\alpha\theta + \phi_s(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)}, \quad \frac{\partial P_M^*}{\partial G_R} = \frac{\alpha\phi_s + \theta(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)},$$

$\frac{\partial P_R^*}{\partial G_R} = \frac{(2\alpha^2 + 6\alpha + 3)\phi_s + 2\alpha(\alpha + 1)\theta}{4(\alpha + 1)(2\alpha + 1)}$ 。由于  $\alpha > 0$ , 当参数  $\phi_s$ ,  $\theta$  满足结论 4 中的各种

条件时，容易判断出  $\frac{\partial w^*}{\partial G_R}$ ， $\frac{\partial P_M^*}{\partial G_R}$  和  $\frac{\partial P_R^*}{\partial G_R}$  的符号。

**结论 5 的证明：**

因为  $\frac{\partial A_R^*}{\partial G_M} = \frac{\partial A_R^*}{\partial A_M^*} \frac{\partial A_M^*}{\partial G_M}$ ，而同时  $\frac{\partial A_M^*}{\partial G_M} > 0$ ，所以  $sign(\frac{\partial A_R^*}{\partial G_M}) = sign(\frac{\partial A_R^*}{\partial A_M^*})$ 。

因为  $\frac{\partial A_R^*}{\partial G_M}(G_M, G_R) = \frac{2\delta^2}{\mu^2} R_3(R_2 G_R + R_3 G_M + R_5)$ ， $R_2 G_R + R_3 G_M + R_5 > 0$

所以  $sign(\frac{\partial A_R^*}{\partial A_M^*}) = sign(\frac{\partial A_R^*}{\partial G_M}) = sign(R_3)$ 。

而由  $C_1 = tr(A) = \frac{\delta^2}{\mu}(T_1^\pm + R_2^\pm) - 2\lambda < 0$  可知： $R_2 + \frac{\mu(2\lambda + r)}{2\delta^2} < \frac{2\mu\lambda}{\delta^2}$ ，

所以  $R_2 < \frac{\mu(\lambda + r)}{\delta^2}$ 。由于  $R_3 = \frac{\mu\phi\phi_s}{8(1+\alpha)[R_2\delta^2 - (r+\lambda)\mu]}$ ，

从而  $sign(R_3) = sign(-\phi)$ 。所以当  $\phi > 0$ （供应商的广告起补充作用）时， $\frac{\partial A_R^*}{\partial A_M^*} < 0$ ；当

$\phi < 0$ （供应商的广告起竞争作用）时， $\frac{\partial A_R^*}{\partial A_M^*} > 0$ 。

**结论 6 的证明：**

供应商面临的利润最大化问题是：

$$\begin{aligned} \max_{A_{Mt}} \int_0^\infty e^{-rt} [w_t^* D_{Rt}^* + P_{Mt}^* D_{Mt}^* - \frac{\mu}{2} A_{Mt}] dt \\ \text{s.t. } \frac{\partial G_{Mt}}{\partial t} = \delta \sqrt{A_{Mt}} - \lambda G_{Mt}, G_M(0) = G_{M0} > 0 \end{aligned}$$

定义 Hamilton 方程：

$$H_M = e^{-rt} [w_t^* D_{Rt}^* + P_{Mt}^* D_{Mt}^* - \frac{\mu}{2} A_{Mt}] - l_M (\delta \sqrt{A_{Mt}} - \lambda G_{Mt})，\text{其中 } l_M \text{ 为 Hamilton 乘子。}$$

值函数  $J_M(t, G_M, G_R) = \max \int_t^\infty e^{-rt} [w_t^* D_{Rt}^* + P_{Mt}^* D_{Mt}^* - \frac{\mu}{2} A_{Mt}] dt$ ， $J_M(0, G_M, G_R)$  就是对应的供应商的利润函数，由《动态经济学方法》第 187 页结论（6.4.1）可知，

$$\frac{\partial J_M(G_M, G_R)}{\partial G_R} = \int_0^\infty \frac{\partial H_M}{\partial G_R} dt$$

所以当  $\frac{\partial w_t^*(G_{Mt}, G_{Rt})}{\partial G_{Rt}} = \frac{\alpha\theta + \varphi_s(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)} > 0$ ,  $\frac{\partial P_{Mt}^*(G_{Mt}, G_{Rt})}{\partial G_{Rt}} = \frac{\alpha\varphi_s + \theta(1+\alpha)}{2(1+2\alpha)} > 0$ ,

$\frac{\partial D_{Mt}^*(G_{Mt}, G_{Rt})}{\partial G_{Rt}} = \frac{\alpha\varphi_s + 2(1+\alpha)\theta}{4(1+\alpha)} > 0$ , 即  $\theta > -\frac{\alpha}{2(1+\alpha)}\varphi_s$  时,  $\frac{\partial H_M}{\partial G_R} > 0$ , 从而

$\frac{\partial J_M(G_M, G_R)}{\partial G_R} > 0$ 。由引理 1 可知这时供应商利润与零售商的广告投入正相关。

### 结论 7 的证明:

与结论 6 的证明类似, 定义 Hamilton 方程:

$$H_R = e^{-rt}[(P_{Rt}^* - w_t^*)D_{Rt}^* - \frac{\mu}{2}A_{Rt}] - l_R(\delta\sqrt{A_{Rt}} - \lambda G_{Rt}), \text{ 其中 } l_R \text{ 为 Hamilton 乘子。}$$

值函数  $J_R(t, G_M, G_R) = \max \int_t^\infty e^{-rt}[(P_{Rt}^* - w_t^*)D_{Rt}^* - \frac{\mu}{2}A_{Rt}]dt$ ,  $J_R(0, G_M, G_R)$  就是对应的零售商的利润函数。类似的,

$$\frac{\partial J_R(t, G_M, G_R)}{\partial G_M} = \int_0^\infty \frac{\partial H_R}{\partial G_M} dt。$$

由于  $P_{Rt}^* - w_t^* = \frac{M + \phi G_{Mt} + \varphi_s G_{Rt}}{4(1+\alpha)}$ ,  $D_{Rt}^*(G_{Mt}, G_{Rt}) = \frac{M + \phi G_{Mt} + \varphi_s G_{Rt}}{4}$ , 所以当  $\phi > 0$

时, 即供应商的广告对零售商起补充作用时, 零售商的利润随着供应商的广告投入增加而增加; 当  $\phi < 0$  时, 即供应商的广告对零售商起竞争作用时, 零售商的利润随着供应商的广告投入增加而减少。

### 参考文献

- [1] 龚六堂. 动态经济学方法[M]. 北京: 北京大学出版社, 2001.
- [2] 罗纳德·肖恩. 动态经济学[M]. 吴汉洪等, 译. 北京: 中国人民大学出版社, 2003.
- [3] 艾兴政, 唐小我. 广告媒介下两种产品竞争与扩散模型研究[J]. 管理工程学报, 2000, 14 (3): 19-22.
- [4] 蔡希杰, 陈德棉. 基于微分博弈理论的广告竞争研究综述[J]. 财贸研究, 2008, 2: 115-122.
- [5] 陈剑, 张小洪, 常炜. 双渠道多制造商供应链的 Cournot 均衡策略[J]. 中国管理科学, 2003, 11 (专辑): 284-289.
- [6] 郭亚军, 赵礼强. 基于电子市场的双渠道冲突与协调[J]. 系统工程理论与实践, 2008, 9: 59-66+81.
- [7] 浦徐进, 石琴, 凌六一. 直销模式对存在强势零售商零售渠道的影响[J]. 管理科学学报, 2007, 10 (6): 49-56.
- [8] 齐洁, 汪定伟. 广告竞争模型中的混沌同步特性分析[J]. 管理科学学报, 2004, 7(2): 27-31.
- [9] 齐洁, 汪定伟. 广告竞争模型的最优控制策略研究[J]. 系统工程理论与实践, 2007, 1:

39-44.

- [10] 熊中楷, 聂佳佳, 李根道. 基于微分对策的多寡头品牌和大类广告策略研究[J]. 管理工程学报, 2009, 23 (3): 72-79.
- [11] 席酉民, 陆晓鸣. 广告的动态最优控制模型[J]. 系统工程理论与实践, 1998, 8: 11-18.
- [12] 张廷, 宣慧玉, 高宝俊. 寡头垄断市场广告投放效果的元胞自动机仿真[J], 系统工程学报, 2008, 23 (3): 309-315.
- [13] 赵道致. 垄断竞争市场定价策略的微分对策模型研究[J]. 管理科学学报, 1999, 2 (4): 34-37.
- [14] 左小德. 双寡头垄断市场下的企业广告竞争分析[J]. 暨南大学学报(自然科学版), 2006, 2: 43-49.
- [15] AILAWADI K L. The retailer power-performance conundrum: what have we learned [J]? *Journal of Retailing*, 2001, 77: 299-318.
- [16] AILAWADI K L, KELLER K L. Understanding retail branding: conceptual insights and research priorities [J]. *Journal of Retailing*, 2004, 80: 331-342.
- [17] BAGWELL K, RAMEY G. Coordination economies, advertising, and search behavior in retail markets [J]. *American Economic Review*, 1994, 84 (3): 386-391.
- [18] BERGEN M, JOHN G. Understanding cooperative advertising participation rates in conventional channels [J]. *Journal of Marketing Research*, 1997, 46: 357-369.
- [19] BERNSTEIN F, SONG J, ZHENG X. Free riding in a multi-channel supply chain [J]. *Naval Research Logistics*, 2009, 56(8): 745-765.
- [20] CATTANI K D, GILLAND W G, SWAMINATHAN J M. Coordinating traditional and internet supply chains [C] // SIMCHI-LEVI D, WU D, SHEN Z J (Eds.). *Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the e-Business Era*. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [21] CHIANG W, CHHAJED D, HESS D. Direct marketing, indirect profits: a strategic analysis of dual-channel supply chain design [J]. *Management Science*, 2003, 49(1): 1-20.
- [22] CHINTAGUNTA P K. Investigating the sensitivity of equilibrium profits to advertising dynamics and competitive effects [J]. *Management Science*, 1993, 39: 1146-1162.
- [23] CHU W, DESAI S. Channel coordination mechanisms for customer satisfaction [J]. *Marketing Science*, 1995, 14(4): 343-359.
- [24] CORBETT J, KARMARKAR S. Competition and structure in serial supply chains with deterministic demand [J]. *Management Science*, 2001, 47(7): 966-978.
- [25] DANT R P, BERGER P D. Modeling cooperative advertising decisions in franchising [J]. *Journal of the Operational Research Society*, 1996, 49(9): 1120-1136.
- [26] DHAR S K, HOCH S J. Why store brands penetration varies by retailer [J]? *Marketing Science*, 1997, 16 (3): 208-227.
- [27] DUBÉ J P, MANCHANDA P. Differences in dynamic brand competition across markets: an empirical analysis [J]. *Marketing Science*, 2005, 24(1): 81-95.
- [28] GOSSMAN M, SHAPIRO C. Informative advertising with differentiated products [J]. *Review of Economic Studies*, 1984, 51(164): 63-81.
- [29] HENDERSHOTT T, ZHANG J. A model of direct and intermediated sales [J]. *Journal of Economics and Management Strategy*, 2006, 15(2): 279-316.
- [30] HUANG Z, LI S X. Co-op advertising models in manufacturer-retailer supply chains: a game

- theory approach [J]. *European Journal of Operational Research*, 2001, 135: 527-544.
- [31] INGENE C A, PARRY M E. Channel coordination when retailers compete [J]. *Marketing Science*, 1995, 14(4): 360-377.
- [32] IYER G. Coordinating channels under price and non-price competition [J]. *Marketing Science*, 1998, 17(4): 338-355.
- [33] JEULAND A P, SHUGAN S M. Managing channel profits [J]. *Marketing Science*, 1983, 2(3): 239-272.
- [34] KARRAY S, MARTÍN-HERRÁN G. A dynamic model for advertising and pricing competition between national and store brands [J]. *European Journal of Operational Research*, 2009, 193: 451-467.
- [35] LEE E, STAELIN R. Vertical strategic interaction: Implications for channel pricing strategy [J]. *Marketing Science*, 1997, 16(3): 185-207.
- [36] MCGUIRE T, STAELIN R. An industry equilibrium analysis of downstream vertical integration [J]. *Marketing Science*, 1983, 2(2): 161-191.
- [37] MOORTHY K S. Managing channel profits: comment [J]. *Marketing Science*, 1987, 6(4): 375-379.
- [38] NELSON P. Advertising as information [J]. *Journal of Political Economy*, 1974, 78: 729-754.
- [39] NERLOVE M, ARROW K J. Optimal advertising policy under dynamic conditions [J]. *Economica*, 1962, 29 (114): 129-142.
- [40] PARK S, KEH H. Modeling hybrid distribution channels: A game-theoretic analysis [J]. *Journal of Retailing and Consumer Services*, 2003, 10: 155-167.
- [41] ROBERT J, STAHL D O. Informative price advertising in a sequential search model [J]. *Econometrica*, 1993, 61 (3): 657-686.
- [42] SWAMINATHAN J, TAYUR S. Models for supply chains in e-business [J]. *Management Science*, 2003, 49(10): 1387-1406.
- [43] TSAY A, AGRAWAL N. Channel dynamics under price and service competition [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2000, 2(4): 372-391.
- [44] TSAY A, AGRAWAL N. Modeling conflict and coordination in multi-channel distribution systems: A review [C] // SIMCHI-LEVI D, WU D, SHEN Z J (Eds.). *Handbook of Quantitative Supply Chain Analysis: Modeling in the e-Business Era*. Boston/Dordrecht/London: Kluwer Academic Publishers, 2004.
- [45] WANG Y, GERCHAK Y. Supply chain coordination when demand is shelf-space dependent [J]. *Manufacturing & Service Operations Management*, 2001, 3(1): 82-87.
- [46] YAO D, LIU J. Channel redistribution with direct selling [J]. *European Journal of Operational Research*, 2003, 144: 646-658.

## **A Dynamic Model for Advertising and Pricing Competition in a Dual-Channel Supply Chain**

Zheng Xiaona, Sun Shuguang, Wu Xueqi  
(Guanghua School of Management, Peking University)

**Abstract** In this paper, we study the pricing and advertising decisions in a supply chain

where the manufacturer sells through a retailer and its own direct channel. In a differential game, in each period the manufacturer decides its wholesale price, direct price and advertising expenses. The retailer then chooses the retail channel's price and advertising expenditure. We find that, (1) the relationship between prices and advertising depends on whether the firms' advertising activities are competitive or complementary. (2) When the effect of manufacturer's advertising on the retailer's sales is complementary, the retailer may free ride on the manufacturer's advertising activities. (3) In a dual-channel, even if the effect of retailer's advertising on the direct channel sales is competitive, under certain circumstances the manufacturer may still benefit from the retailer's increased advertising budget.

**Key Words** Dual-Channel Supply Chain, Advertising, Goodwill, Differential Game

专业主编: 庄贵军